## METODE SIMPLEKS YANG DIREVISI

### 1. Bentuk Standar Dalam Matriks

Maksimumkan atau minimumkan: Z = CX

Batasan: (A,I)X = b

Contoh:

Maksimumkan: $Z = 3X_1 + 2X_2$

Batasan: $X_1 + 2X_2 \le 6$

$2X_1 + X_2 \le 8$

$-X_1 + X_2 \le 1$

$X_2 \le 2$

Bentuk standar simpleks:

Maksimumkan: $Z = 3X_1 + 2X_2 + 0X_3 – 0X_4 + 0X_5 + 0X_6$

Batasan: $X_1 + 2X_2 + X_3 = 6$

$2X_1 + X_2 + X_4 = 8$

$-X_1 + X_2 + X_5 = 1$

$X_2 + X_6 = 2$

*Bentuk standar matriks*:

Maksimumkan:
$$Z = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix}$$

Batasan:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

### 2. Pemecahan Dasar dan Basis

(A,I)X = b memiliki *m* persamaan dan *n* variable yang tidak diketahui. Sebuah pemecahan dasar diperoleh dengan menetapkan *n* – *m* variable sama dengan nol dan lalu memecahkan $m$ persamaan dengan $m$ variable yang tidak diketahui. Secara matematis anggaplah:

$$(A,I)X = \sum_{j}^{n} P_j X_J$$

Dimana $P_j$ adalah vector kolom ke – j dari (A,I). Dari contoh diatas, dimana kita memiliki $m$ = 4 dan $n$ = 6. Ini berarti basis terdiri dari $m$ = 4 vektor dan $n$ – $m$ = (6 – 4 = 2) variable yang berkaitan, dengan vector sisanya ditetapkan sama dengan nol. Dengan menganggap $X_3 = X_4 = X_5 = X_6 = 0$, kita menemukan bahwa vector:

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad P_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad P_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad P_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B = (P_3, P_4, P_5, P_6) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**3. Table Simpleks Dalam Bentuk Matriks**

Maksimumkan atau minimumkan: Z = CX

Batasan: (A,I)X = b

Bagi vector X kedalam $X_I$ dan $X_{II}$, dimana $X_{II}$ bersesuaian dengan elemen-elemen dari X yang berkaitan dengan basis awal B = I. Bagi C kedalam $C_I$ dan $C_{II}$ untuk bersesuaianan dengan $X_I$ dan $X_{II}$. Jadi bentuk standar dapat ditulis sebagai:

Maksimumkan : Z = CX; menjadi: $Z - C_I X_I - C_{II} X_{II} = 0$

Batasan: (A,I)X = b;

Karena $X_{II}$ bersesuaian dengan elemen-elemen dari X yang berkaitan dengan basis awal B = I, sehingga: $AX_I + IX_{II} = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & -C_I & -C_{II} \\ 0 & A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ X_I \\ X_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

Disetiap iterasi, anggaplah $X_B$ mewakili variable dasar saat ini dengan B basis yang berkaitan dengannya. Berarti $X_B$ mewakili $m$ elemen dari X dengan B mewakili vector

(A,I) yang berkaitan dengan $X_B$. Anggaplah $C_B$ adalah elemen C yang berkaitan dengan $X_B$, sehingga:

$Z = C_B X_B$; sama dengan $Z - C_B X_B = 0$, dan

$BX_B = b$

$\begin{bmatrix} 1 & -C_B \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ X_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$ sama dengan:

$$\begin{bmatrix} Z \\ X_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & C_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_B B^{-1} b \\ B^{-1} b \end{bmatrix}$$

Table simpleks yang bersesuaian dengan $X_B$ diperoleh dengan mempertimbangkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & C_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -C_I & -C_{II} \\ 0 & A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ X_I \\ X_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & C_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -C_i + C_B B^{-1} A & -C_{II} + C_B B^{-1} I \\ 0 & B^{-1} A & B^{-1} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ X_I \\ X_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_B B^{-1} b \\ B^{-1} b \end{bmatrix}$$

Ingat: $X_{II}$ bersesuaian dengan elemen-elemen dari X yang berkaitan dengan basis awal B = I, sehingga iterasi simpleks umum dalam bentuk matriks:

| Dasar | $X_I$ | $X_{II}$ | Pemecahan |
|---|---|---|---|
| Z | $C_B B^{-1} A - C_I$ | $C_B B^{-1} - C_{II}$ | $C_B B^{-1} b$ |
| $X_B$ | $B^{-1} A$ | $B^{-1}$ | $B^{-1} b$ |

**4. Langkah-Langkah Metode Simpleks Primal Yang Direvisi.**

*Langkah 1*: Penentuan variable masuk $P_j$.

Hitung $Y = C_B B^{-1}$ untuk setiap vector non dasar $P_j$, hitung

$Z_j - C_j = YP_j - C_j$

Untuk program maksimalisasi (minimalisasi), vector $P_j$ dipilih yang memiliki $Z_j - C_j$ paling negative (positif) (tentukan sembarang jika terdapat lebih dari satu yang sama). Jika semua $Z_j - C_j \geq 0$ ($\leq = 0$), pemecahan optimal telah dicapai dan diketahui dengan

$X_B = B^{-1} b$ dan $Z = C_B X_B$

*Langkah 2*. Penentuan variable keluar $P_r$.

a. Nilai variable dasar saat ini yaitu:

$X_B = B^{-1}b$

b. Koefisien batasan dari variable masuk yaitu:

$\alpha^j = B^{-1}P_j$

variable keluar $P_r$ (baik maksimalisasi maupun minimalisasi) harus berkaitan dengan:

$$\theta = \min\left[\frac{(B^{-1}b)_k}{\alpha_k^j}, \alpha_k^j \geq 0\right]$$

*Langkah 3*. Penentuan basis berikutnya.

dimana: $$\xi = \begin{bmatrix} -\alpha_1^j / \alpha_r^j \\ -\alpha_2^j / \alpha_r^j \\ \vdots \\ +1/\alpha_r^j \\ \vdots \\ -\alpha_m^j / \alpha_r^j \end{bmatrix}$$

Dari contoh berikut, maka langkah-langkah perhitungan metode simpleks primal yang direvisi adalah sebagai berikut:

Maksimumkan: $Z = 3X_1 + 2X_2 + 0X_3 - 0X_4 + 0X_5 + 0X_6$

Batasan: $X_1 + 2X_2 + X_3 = 6$

$2X_1 + X_2 + X_4 = 8$

$-X_1 + X_2 + X_5 = 1$

$X_2 + X_6 = 2$

**Pemecahan Awal:**

$X_B = (X_3,X_4,X_5,X_6)$

$C_B = (0,0,0,0)$

$$B = (P_3, P_4, P_5, P_6) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$B^{-1} = I$

**Iterasi Pertama:**

*Langkah 1.* Perhitungan $Z_j - C_j$ untuk non dasar $P_1$ dan $P_2$

$$Y = C_B B^{-1} = (0, 0, 0, 0)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0, 0, 0, 0]$$

$Z_1 - C_1, Z_2 - C_2 = Y(P_1,P_2) - (C_1,C_2)$

$$Z_1 - C_1, Z_2 - C_2 = [0,0,0,0]\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - [3,2]$$

$Z_1 - C_1, Z_2 - C_2 = (-3,-2)$

Karena $P_1$ memiliki nilai paling negative, maka $P_1$ ditetapkan sebagai vector masuk.

*Langkah 2.* Penentuan vector keluar dengan diketahui bahwa $P_1$ memasuki basis.

$$X_B = B^{-1}b = Ib = b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha^1 = B^{-1}P_1 = IP_1 = P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Perhitungan untuk langkah 1 dan 2 dapat diringkaskan sebagai berikut:

| Dasar | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ | Pemecahan |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -3 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $X_3$ | 1 | | | | | | 6 |
| $X_4$ | 2 | | | | | | 8 |
| $X_5$ | -1 | | | | | | 1 |
| $X_6$ | 0 | | | | | | 2 |

Jadi: θ = min (6/1, 8/2, --, --) = (6, 4, --, --) = 4, yang bersesuaian dengan $X_4$, dengan demikian $P_4$ adalah vector keluar dengan nilai $\alpha_2^1 = 2$, sehingga:

*Langkah 3*. Penentuan inverse basis berikutnya.

$$\xi = \begin{bmatrix} -1/2 \\ +1/2 \\ -(-1/2) \\ -0/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maka basis berikutnya:

$$B_{next}^{-1} = EB^{-1} = EI = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Basis baru ini berkaitan dengan vector dasar:

$X_B = (X_3,X_1,X_5,X_6)$

$C_B = (0,3,0,0)$

$$B = (P_3, P_1, P_5, P_6) = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B_{next}^{-1},$$

**Iterasi Kedua:**

*Langkah 1.* Perhitungan $Z_j - C_j$ untuk non dasar $P_2$ dan $P_4$

$$Y = C_B B^{-1} = (0, 3, 0, 0) \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$Y = C_B B^{-1} =$ {(0*1 + 3*0 + 0*0 + 0*0), (3*-1/2 + 3*1/2 + 3*1/2 + 3*0),

(0*0 + 0*0 + 0*1 + 0*0), (0*0 + 0*0 + 0*0 + 0*1)}

$Y = C_B B^{-1} =$ (0, 3/2, 0, 0)

$Z_2 - C_2, Z_4 - C_4 = Y(P_2,P_4) - (C_2,C_4)$

$$Z_2 - C_2, Z_4 - C_4 = [0, 3/2, 0, 0] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - [2, 0]$$

$Z_2 - C_2, Z_4 - C_4 =$ {(0*2 + 3/2*1 + 0*1 + 0*1), (0*0 + 3/2*1 + 0*0 + 0*0)} – (2, 0)

$Z_2 - C_2, Z_4 - C_4 =$ (3/2, 3/2) – (2, 0) = (-1/2, 3/2)

Karena $P_2$ memiliki nilai paling negative, maka $P_2$ merupakan vector masuk.

*Langkah 2*. Penentuan vector keluar dengan diketahui bahwa $P_2$ memasuki basis.

$$X_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1*6)+(-1/2*8)+(0*1)+(0*2) \\ (0*6)+(1/2*8)+(0*1)+(0*2) \\ (0*6)+(1/2*8)+(1*1)+(0*2) \\ (0*6)+(0*8)+(0*1)+(1*2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha^2 = B^{-1}P_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1*2)+(-1/2*1)+(0*1)+(0*1) \\ (0*2)+(1/2*1)+(0*1)+(0*1) \\ (0*2)+(1/2*1)+(1*1)+(0*1) \\ (0*2)+(0*1)+(0*1)+(1*1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Perhitungan untuk langkah 1 dan 2 dapat diringkaskan sebagai berikut:

| Dasar | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ | Pemecahan |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | -1/2 | 0 | 3/2 | 0 | 0 | |
| $X_3$ | | 3/2 | | | | | 2 |
| $X_1$ | | 1/2 | | | | | 4 |
| $X_5$ | | 3/2 | | | | | 5 |
| $X_6$ | | 1 | | | | | 2 |

Jadi: θ = min (2/(3/2), 4/(1/2), 5/(3/2), 2/1) = (4/3, 8, 10/3, 2) = 4/3, yang bersesuaian dengan $X_3$, dengan demikian $P_3$ adalah vector keluar dengan nilai $\alpha_1^2 = 4/3$, sehingga:

*Langkah 3*. Penentuan inverse basis berikutnya.

$$\xi = \begin{bmatrix} +1/(3/2) \\ -1/2/(3/2) \\ -3/2/(3/2) \\ -1/(3/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -1 \\ -2/3 \end{bmatrix}$$

Maka basis berikutnya:

$$B_{next}^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

= (2/3*1+0+0+0), (2/3*-1/2+0+0+0), (0), (0)

= (-1/3*1+0+0+0), (-1/3*-1/2+1*1/2+0+0), (0), (0)

= (-1*1+0+0+0), (-1*-1/2+0+1*1/2+0), (0+0+1+0), (0)

= (-2/3*1+0+0+0), (-2/3*-1/2+0+0+0), (0), (1)

Sehingga: $B_{next}^{-1}$ =

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2/3 | -1/3 | 0 | 0 |
| -1/3 | 2/3 | 0 | 0 |
| -1 | 1 | 1 | 0 |
| -2/3 | 1/3 | 0 | 1 |

Basis baru ini berkaitan dengan vector dasar:

$X_B = X_2, X_1, X_5, X_6$

$C_B = (2, 3, 0, 0)$

**Iterasi Ketiga:**

*Langkah 1.* Perhitungan $Z_j - C_j$ untuk non dasar $P_3$ dan $P_4$

$$Y = C_B B^{-1} = (2, 3, 0, 0)\begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y = C_B B^{-1} = \quad \{(2*2/3 + 3*-1/3 + 0 + 0), (2*-1/3 + 3*2/3 + 0 + 0), (0), (0)\}$$

$$Y = C_B B^{-1} = \quad (1/3, 4/3, 0, 0)$$

$Z_3 - C_3, Z_4 - C_4 = Y(P_3,P_4) - (C_3,C_4)$

$$Z_3 - C_3, Z_4 - C_4 = [1/3, 4/3, 0, 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - [0, 0]$$

$Z_3 - C_3, Z_4 - C_4 = \{(1/3*1 + 0 + 0 + 0), (0 + 4/3*1 + 0 + 0)\} - (0, 0)$

$Z_3 - C_3, Z_4 - C_4 = (1/3, 4/3) - (0, 0) = (1/3, 4/3)$

Karena semua $Z_j - C_j \geq 0$, basis terakhir ini optimal.

**Pemecahan Optimal:**

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ X_1 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2/3*6+-1/3*8+0+0) \\ (-1/3*6+2/3*8+0+0) \\ (-1*6+1*8+1*1+0) \\ (-2/3*6+1/3*8+0+1*2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 10/3 \\ 3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$$Z = C_B X_B = (2, 3, 0, 0) \begin{bmatrix} 4/3 \\ 10/3 \\ 3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \left[2*4/3+3*10/3+0+0\right] = 38/3 = 12\frac{2}{3}$$

Kesimpulan:

$X_1 = 10/3$

$X_2 = 4/3$

$Z = 38/3$

REFERENSI

1. Taha, Hamdy A., *Riset Operasi* – Jilid 1, Jakarta: Binarupa Aksara, 1996