

PEMPROGRAMAN DINAMIS

Pemrograman dinamis merupakan prosedur matematis yang dirancang untuk memperbaiki efisiensi perhitungan masalah pemrograman matematis tertentu dengan menguraikannya menjadi bagian-bagian masalah yang lebih kecil supaya lebih sederhana dalam perhitungannya. Pemrograman dinamis pada umumnya menjawab masalah dalam tahap-tahap, dengan setiap tahap meliputi satu variable optimasi.

A. METODE LANGKAH MAJU

Sebuah perusahaan mempunyai usulan dari ketiga pabriknya untuk kemungkinan mengembangkan sarana produksi. Perusahaan tersebut menyediakan anggaran \$ 5 juta untuk alokasi ketiga pabrik. Setiap pabrik diminta untuk menyampaikan usulan yang memberikan jumlah biaya (c) dan jumlah pendapatan untuk setiap usulan.

Usulan	Pabrik 1		Pabrik 2		Pabrik 3	
	C_1	R_1	C_2	R_2	C_3	R_3
1	0	0	0	0	0	0
2	1	5	2	8	1	3
3	2	6	3	9	--	--
4	--	--	4	12	--	--

Untuk memudahkan pembahasan, misalkan:

X_1 = Jumlah modal yang dialokasikan untuk tahap 1

X_2 = Jumlah modal yang dialokasikan untuk tahap 1 dan 2

X_3 = Jumlah modal yang dialokasikan untuk tahap 1, 2, dan 3

Tahap 1:

Penghitungan untuk tahap 1 bersifat langsung, berikut merupakan ringkasan keputusan bersyarat untuk tahap 1.

Jika modal (biaya) yang tersedia X_1 sama dengan:	Maka, usulan optimalnya adalah:	Jumlah pendapatan tahap 1 adalah:
0	1	0
1	2	5
2	3	6
3	3	6
4	3	6
5	3	6

Tahap 2:

Gagasan sekarang adalah memilih alternative dalam tahap 2 dengan diketahui X_2 menghasilkan pendapatan terbaik untuk tahap 1 dan 2. Rumus berikut meringkaskan sifat dari perhitungan untuk tahap 2.

Pendapatan terbesar untuk tahap 1 dan 2 dengan diketahui keadaan X_2 *sama dengan maksimal* semua alternative yang layak dari tahap 2 dengan diketahui X_2 (pendapatan alternative yang layak untuk tahap 2 *ditambah* pendapatan terbesar untuk tahap 1 dengan diketahui keadaan X_1 . Dimana X_1 *sama dengan* X_2 dikurang biaya yang dialokasikan pada alternative tahap 2.

$$X_2 = 0$$

Satu-satunya alternative yang layak untuk tahap 2 dengan diketahui $X_2 = 0$ adalah usulan 1 yang biaya dan pendapatannya sama dengan nol.

$$R \text{ (pendapatan) terbesar dengan } X_2 = 0 \text{ adalah } (0 + 0 = 0)$$

$$X_2 = 1$$

Kita hanya memiliki satu alternative yang layak untuk pabrik 2, yaitu usulan 1 yang memiliki biaya dan pendapatan sama dengan nol.

$$\text{Usulan 1: } X_1 = X_2 - \text{biaya usulan 1; } X_1 = 1 - 0; X_1 = 1$$

Dalam table ringkasan tahap 1 dapat diketahui bahwa penghasilan terbesar dengan diketahui $X_1 = 1$ adalah 5, sehingga:

$$R \text{ (pendapatan) terbesar dengan } X_2 = 1 \text{ adalah } (0 + 5 = 5)$$

$$X_2 = 2$$

Kita memiliki dua alternative yang layak untuk pabrik 2, yaitu usulan 1 dan 2. Usulan 1 memiliki biaya dan pendapatan sama dengan nol, dan usulan 2 memiliki biaya dan pendapatan sebesar 2 dan 8.

Usulan 1: $X_1 = X_2 - \text{biaya usulan 1}; X_1 = 2 - 0; X_1 = 2$

Usulan 2: $X_1 = X_2 - \text{biaya usulan 2}; X_1 = 2 - 2; X_1 = 0$

Dalam table ringkasan tahap 1 dapat diketahui bahwa penghasilan terbesar dengan diketahui $X_1 = 2$ dan $X_1 = 0$ masing-masing sebesar 6 dan 0, sehingga:

R (pendapatan) terbesar dengan $X_2 = 2$ adalah $\max(0 + 6, 8 + 0 = 8)$

$X_2 = 3$

Kita memiliki tiga alternative yang layak untuk pabrik 2, yaitu usulan 1, 2, dan 3. Usulan 1 memiliki biaya dan pendapatan sebesar nol, usulan 2 memiliki biaya dan pendapatan sebesar 2 dan 8, dan usulan 3 memiliki biaya dan pendapatan masing-masing sebesar 3 dan 9.

Usulan 1: $X_1 = X_2 - \text{biaya usulan 1}; X_1 = 3 - 0; X_1 = 3$

Usulan 2: $X_1 = X_2 - \text{biaya usulan 2}; X_1 = 3 - 2; X_1 = 1$

Usulan 3: $X_1 = X_2 - \text{biaya usulan 3}; X_1 = 3 - 3; X_1 = 0$

Dalam table ringkasan tahap 1 dapat diketahui bahwa penghasilan terbesar dengan diketahui $X_1 = 3$, $X_1 = 1$, dan $X_1 = 0$ masing-masing sebesar 6, 5, dan 0, sehingga:

R terbesar dengan $X_2 = 3$ adalah $\max(0 + 6, 8 + 5, 9 + 0 = 13)$

$X_2 = 4$

Kita memiliki 4 alternative yang layak untuk pabrik 2, yaitu usulan 1, 2, 3, dan 4. Usulan 1 memiliki biaya dan pendapatan sebesar nol, usulan 2 memiliki biaya dan pendapatan sebesar 2 dan 8, usulan 3 memiliki biaya dan pendapatan sebesar 3 dan 9, dan usulan 4 memiliki biaya dan pendapatan sebesar 4 dan 12.

Usulan 1: $X_1 = X_2 - \text{biaya usulan 1}; X_1 = 4 - 0; X_1 = 4$

Usulan 2: $X_1 = X_2 - \text{biaya usulan 2}; X_1 = 4 - 2; X_1 = 2$

Usulan 3: $X_1 = X_2 - \text{biaya usulan 3}; X_1 = 4 - 3; X_1 = 1$

Usulan 4: $X_1 = X_2 - \text{biaya usulan 4}; X_1 = 4 - 4; X_1 = 0$

Dalam table ringkasan tahap 1 dapat diketahui bahwa penghasilan terbesar dengan diketahui $X_1 = 4$, $X_1 = 2$, $X_1 = 1$, dan $X_1 = 0$ masing-masing sebesar 6, 6, 5, dan 0, sehingga:

R terbesar dengan $X_2 = 4$ adalah $\max(0 + 6, 8 + 6, 9 + 5, 12 + 0 = 14)$

$$X_2 = 5$$

Kita memiliki 4 alternative yang layak untuk pabrik 2, yaitu usulan 1, 2, 3, dan 4. Usulan 1 memiliki biaya dan pendapatan sebesar nol, usulan 2 memiliki biaya dan pendapatan sebesar 2 dan 8, usulan 3 memiliki biaya dan pendapatan sebesar 3 dan 9, dan usulan 4 memiliki biaya dan pendapatan sebesar 4 dan 12.

Usulan 1: $X_1 = X_2$ – biaya usulan 1; $X_1 = 5 - 0$; $X_1 = 5$

Usulan 2: $X_1 = X_2$ – biaya usulan 2; $X_1 = 5 - 2$; $X_1 = 3$

Usulan 3: $X_1 = X_2$ – biaya usulan 3; $X_1 = 5 - 3$; $X_1 = 2$

Usulan 4: $X_1 = X_2$ – biaya usulan 4; $X_1 = 5 - 4$; $X_1 = 1$

Dalam table ringkasan tahap 1 dapat diketahui bahwa penghasilan terbesar dengan diketahui $X_1 = 5$, $X_1 = 3$, $X_1 = 2$, dan $X_1 = 1$ masing-masing sebesar 6, 6, 6, dan 5, sehingga:

R terbesar dengan $X_2 = 4$ adalah $\max(0 + 6, 8 + 6, 9 + 6, 12 + 5 = 17)$

Jika modal (biaya) yang tersedia X_2 sama dengan:	Maka, usulan optimalnya adalah:	Jumlah pendapatan tahap 2 adalah:
0	1	0
1	1	5
2	2	8
3	2	13
4	2 atau 3	14
5	4	17

Tahap 3:

Tidak seperti X_1 dan X_2 , X_3 sekarang memiliki satu nilai spesifik, yaitu 5, sehingga kita memiliki 2 alternative yang layak untuk pabrik 3, yaitu usulan 1 dan 2. Usulan 1 memiliki biaya dan pendapatan sebesar nol, dan usulan 2 memiliki biaya dan pendapatan sebesar 1 dan 3.

Usulan 1: $X_2 = X_3$ – biaya usulan 1; $X_2 = 5 - 0$; $X_2 = 5$

Usulan 2: $X_2 = X_3$ – biaya usulan 2; $X_2 = 5 - 1$; $X_4 = 4$

Dalam table ringkasan tahap 2 dapat diketahui bahwa penghasilan terbesar dengan diketahui $X_2 = 5$ dan $X_2 = 4$ masing-masing sebesar 17 dan 14, sehingga:

R terbesar dengan $X_3 = 5$ adalah $\max(17 + 0, 14 + 3 = 17)$

Jika modal (biaya) yang tersedia X_3 sama dengan:	Maka, usulan optimalnya adalah:	Jumlah pendapatan tahap 3 adalah:
5	1 atau 2	17

Dari perhitungan diatas, kita dapat membaca pemecahan secara langsung. Tahap 3 memberikan pendapatan terbesar sebesar 17 dengan memilih usulan 1 atau 2. Jika kita memilih usulan 1 dengan $C_3 = 0$, maka $X_2 = (5 - 0 = 5)$ dan optimal pada usulan 4 dengan $C_2 = 4$, sehingga $X_1 = (5 - 0 - 4 = 1)$ dan optimal pada usulan 2 dengan $C_1 = 1$. Pemecahan optimal mengharuskan pemilihan usulan 2 untuk pabrik 1, usulan 4 untuk pabrik 2, dan usulan 1 untuk pabrik 3.

Jika memilih usulan 2 dengan $C_3 = 1$, maka $X_2 = (5 - 1 = 4)$ dan optimal pada usulan 3 dengan $C_2 = 3$, sehingga $X_1 = (5 - 1 - 3 = 1)$ dan optimal pada usulan 2 dengan $C_1 = 1$. Pemecahan optimal mengharuskan pemilihan usulan 2 untuk pabrik 1, usulan 3 untuk pabrik 2, dan usulan 2 untuk pabrik 3.

Jika kita memilih usulan 2 dengan $C_3 = 1$, maka $X_2 = (5 - 1 = 4)$ dan optimal pada usulan 2 dengan $C_2 = 2$, sehingga $X_1 = (5 - 1 - 2 = 2)$ dan optimal pada usulan 3 dengan $C_1 = 2$. Pemecahan optimal mengharuskan pemilihan usulan 3 untuk pabrik 1, usulan 2 untuk pabrik 2, dan usulan 2 untuk pabrik 3.

Perhitungan secara ringkas:

Tahap 1:

X_1	Pabrik 1			Pemecahan Optimal	
	Usulan 1	Usulan 2	Usulan 3	Max Baris	Usulan
0	0	--	--	0	1
1	0	5	--	5	2
2	0	5	6	6	3
3	0	5	6	6	3
4	0	5	6	6	3
5	0	5	6	6	3

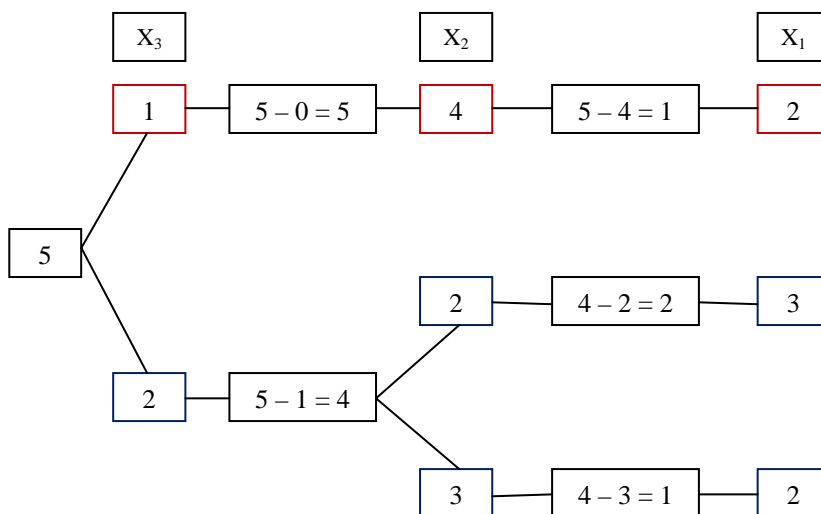
Tahap 2:

X ₂	Pabrik 2				Pemecahan Optimal	
	Usulan 1	Usulan 2	Usulan 3	Usulan 4	Max Baris	Usulan
0	0 + 0 = 0	--	--	--	0	1
1	0 + 5 = 5	--	--	--	5	1
2	0 + 6 = 6	8 + 0 = 8	--	--	8	2
3	0 + 6 = 6	8 + 5 = 13	9 + 0 = 9	--	13	2
4	0 + 6 = 6	8 + 6 = 14	9 + 5 = 14	12 + 0 = 12	14	2 atau 3
5	0 + 6 = 6	8 + 6 = 14	9 + 6 = 15	12 + 5 = 17	17	4

Tahap 3:

X ₃	Pabrik 3		Pemecahan Optimal	
	Usulan 1	Usulan 2	Max Baris	Usulan
0	0 + 0 = 0		0	1
1	0 + 5 = 5	3 + 0 = 3	5	1
2	0 + 8 = 8	3 + 5 = 8	8	1 atau 2
3	0 + 13 = 13	3 + 8 = 11	13	1
4	0 + 14 = 14	3 + 13 = 16	16	2
5	0 + 17 = 17	3 + 14 = 17	17	1 atau 2

Diagram Keputusan Optimal



B. METODE LANGKAH MUNDUR

Menggunakan kasus sebelumnya, misalkan:

X_1 = Jumlah modal yang dialokasikan untuk tahap 1, 2, dan 3

X_2 = Jumlah modal yang dialokasikan untuk tahap 2 dan 3

X_3 = Jumlah modal yang dialokasikan untuk tahap 3

Tahap 3:

X_3	Pabrik 3		Pemecahan Optimal	
	Usulan 1	Usulan 2	Max Baris	Usulan
0	0	--	0	1
1	0	3	3	2
2	0	3	3	2
3	0	3	3	2
4	0	3	3	2
5	0	3	3	2

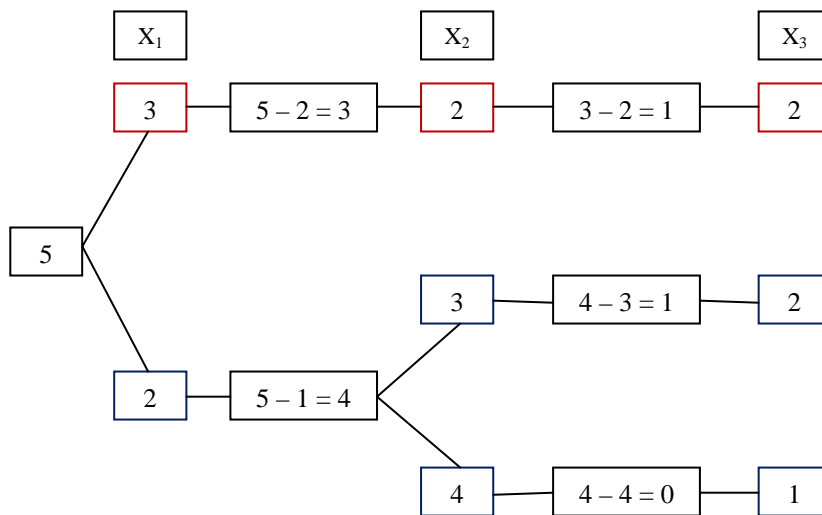
Tahap 2:

X_2	Pabrik 2				Pemecahan Optimal	
	Usulan 1	Usulan 2	Usulan 3	Usulan 4	Max Baris	Usulan
0	$0 + 0 = 0$	--	--	--	0	1
1	$0 + 3 = 3$	--	--	--	3	1
2	$0 + 3 = 3$	$8 + 0 = 8$	--	--	8	2
3	$0 + 3 = 3$	$8 + 3 = 11$	$9 + 0 = 9$	--	11	2
4	$0 + 3 = 3$	$8 + 3 = 11$	$9 + 3 = 12$	$12 + 0 = 12$	12	3 atau 4
5	$0 + 3 = 3$	$8 + 3 = 11$	$9 + 3 = 12$	$12 + 3 = 15$	15	4

Tahap 3:

X ₁	Pabrik 1			Pemecahan Optimal	
	Usulan 1	Usulan 2	Usulan 3	Max Baris	Usulan
0	0 + 0 = 0			0	1
1	0 + 3 = 3	5 + 0 = 5		5	2
2	0 + 8 = 8	5 + 3 = 8	6 + 0 = 6	8	1 atau 2
3	0 + 11 = 11	5 + 8 = 13	6 + 3 = 9	13	2
4	0 + 12 = 12	5 + 11 = 16	6 + 8 = 14	16	2
5	0 + 15 = 15	5 + 12 = 17	6 + 11 = 17	17	2 atau 3

Diagram Keputusan Optimal



Contoh 2: (Metode Langkah Maju)

Keuntungan pada empat macam kegiatan merupakan fungsi jam kerja yang dialokasikan pada masing-masing kegiatan. Jika setiap hari tersedia 4 jam kerja , bagaimana alokasi waktu sehingga keuntungan perhari maksimum.

Jam Kerja	Kegiatan			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	1	2	3	2
2	3	5	7	5
3	6	8	10	8
4	9	11	12	10

Untuk memudahkan pembahasan, misalkan:

X_1 = Jumlah jam kerja yang dialokasikan untuk kegiatan 1

X_2 = Jumlah jam kerja yang dialokasikan untuk kegiatan 1 dan 2

X_3 = Jumlah jam kerja yang dialokasikan untuk kegiatan 1, 2, dan 3

X_4 = Jumlah jam kerja yang dialokasikan untuk kegiatan 1, 2, 3, dan 4

Tahap 1:

X_1	Keuntungan					Pemecahan Optimal	
	0	1	2	3	4	Max Baris	Kegiatan
0	0	--	--	--	--	0	0
1	--	1	--	--	--	1	1
2	--	--	3	--	--	3	2
3	--	--	--	6	--	6	3
4	--	--	--	--	9	9	4

Tahap 2:

X_2	Keuntungan					Pemecahan Optimal	
	0	1	2	3	4	Max Baris	Kegiatan
0	$0+0=0$	--	--	--	--	0	0
1	$0+1=1$	$2+0=2$	--	--	--	2	1
2	$0+3=3$	$2+1=3$	$5+0=5$	--	--	5	2
3	$0+6=6$	$2+3=5$	$5+1=6$	$8+0=8$	--	8	3
4	$0+9=9$	$2+6=8$	$5+3=8$	$8+1=9$	$11+0=11$	11	4

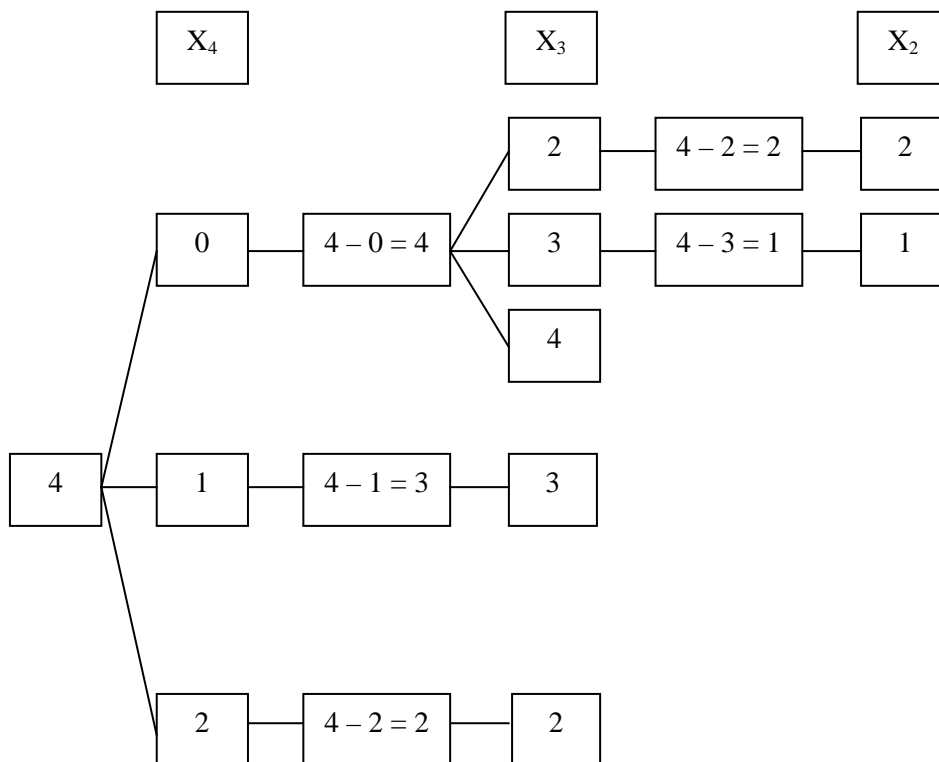
Tahap 3:

X_3	Keuntungan					Pemecahan Optimal	
	0	1	2	3	4	Max Baris	Kegiatan
0	$0+0=0$	--	--	--	--	0	0
1	$0+2=2$	$3+0=3$	--	--	--	3	1
2	$0+5=5$	$3+2=5$	$7+0=7$	--	--	7	2
3	$0+8=8$	$3+5=8$	$7+2=9$	$10+0=10$	--	10	3
4	$0+11=11$	$3+8=11$	$7+5=12$	$10+2=12$	$12+0=12$	12	2, 3, 4

Tahap 4:

X ₄	Keuntungan					Pemecahan Optimal	
	0	1	2	3	4	Max Baris	Kegiatan
0	$0 + 0 = 0$	--	--	--	--	0	0
1	$0 + 3 = 3$	$2 + 0 = 2$	--	--	--	3	0
2	$0 + 7 = 7$	$2 + 3 = 5$	$5 + 0 = 5$	--	--	7	0
3	$0 + 10 = 10$	$2 + 7 = 9$	$5 + 3 = 8$	$8 + 0 = 8$	--	10	0
4	$0 + 12 = 12$	$2 + 10 = 12$	$5 + 7 = 12$	$8 + 3 = 11$	$10 + 0 = 10$	12	0, 1, 2

Diagram Keputusan Optimal



REFERENSI

1. Sri Mulyono, *Riset Operasi*, Jakarta: Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi UI, 2002
2. Taha, Hamdy A., *Riset Operasi – Jilid 1*, Jakarta: Binarupa Aksara, 1996